

... 17 x 17.

18/3/19

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε κάθε α (ανω) ημιανοδική συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι α φραγμένη (αντ. ανω) και υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε :

$$f(y) = \inf \{ f(x) : x \in A \} \quad (\text{αντ. } f(y) = \sup \{ f(x) : x \in A \})$$

Απόδειξη

Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές και f α ημιανοδική
Εστω $b = \inf \{ f(x) : x \in A \}$. Θα δείξουμε ότι $b \in \mathbb{R}$, εφόσον
 $b = \inf \{ f(x) : x \in A \}$ υπάρχει $(x_n) \subseteq A$ τέτοια ώστε $\lim_n f(x_n) = b$ (19)

Αλλά $(x_n) \in A$ συμπαγές επομένως έχει μια συχνηνύουσα υποκολουθία, έστω λοιπόν ~~έστω~~ $z_n = (x_{n_k}) \in A$ υποκολουθία της (x_n) τέτοια ώστε $\lim x_{n_k} = \lim z_n = y \in A$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(1) Η (z_n) είναι τελικά σταθερή τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ π.ω $z_n = y \ \forall n > n_0$
 άρα $b = \liminf f(x_n) = \liminf f(z_n) = f(y)$ Άρα $f(y) = b$

(2) Η z_n δεν είναι τελικά σταθερή οπότε υπάρχει υποκολουθία της με όρους διαφορετικούς. Έστω (w_n) αυτή η υποκολουθία της (z_n) . Εφόσον οι όροι είναι διαφορετικοί $(w_n) \in A \setminus \{y\}$ και εφόσον: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \inf \Gamma_y$ όπου $\Gamma_y = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists x_n \in A \ \forall y\}$ με $\lim f(x_n) = x$ και $\lim x_n = y$ } άρα $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \liminf f(w_n)$
 οπότε εφόσον $b = \liminf f(x_n)$ και (w_n) είναι υποκολουθία της (x_n)
 οπότε $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \liminf f(w_n) = \lim f(w_n) = b$ (*) αλλά η f είναι κάτω ημισυνεχής οπότε $b \leq f(y) \leq \liminf f(x) \stackrel{(*)}{\leq} b$, $b = \inf \{f(x) : x \in A\}$.
 άρα $f(y) = b$

ΑΣΚΗΣΗ

Να εξετάσετε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 & x \neq 1 \\ \lambda & x = 1 \end{cases}$$
 είναι άνω ημισυνεχής

Απάντηση

Για κάθε $x \neq 1$ η f είναι συνεχής άρα άνω και κάτω ημισυνεχής

Για $x_0 = 1$:

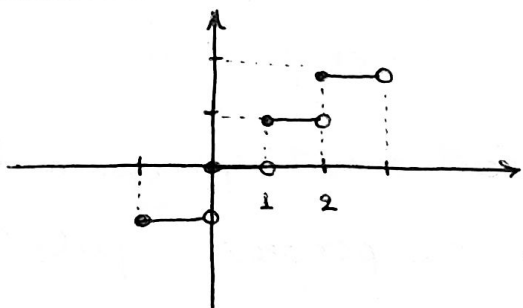
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \quad \text{Άρα} \quad \limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Η f είναι άνω ημισυνεχής ~~από~~ στο $x_0 = 1$ αν $\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) \leq f(1)$
 δηλ. $0 \leq \lambda$.

Άσκηση 24

Να εξετάσετε ως προς την ημισυνέχεια την συνάρτηση $f(x) = [x] \quad x \in \mathbb{R}$

Απάντηση



• Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ η f είναι συνεχής άρα είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

• Για $y \in \mathbb{Z}$ τότε $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y^-} f(x) = y-1 < y = f(y)$

Ενώ $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) = y \leq y = f(y)$ Άρα η f είναι άνω ημισυνεχής στο $y \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 25

Να εξετάσετε ως προς την ημισυνέχεια την συνάρτηση

$$f(x) = \sin(\underbrace{x - [x]}_{g(x)}), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{η } \sin x \text{ είναι αύξουσα στο } (0, \frac{\pi}{2}))$$

Άσκηση 26

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ με $\lim_n x_n = x$ ισχύει $\liminf f(x_n) \geq f(x)$ τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής.

Απάντηση

Για να δείσουμε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αρκεί ν.δ.ο $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, το $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ είναι ανοικτό. Έστω ότι $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ δεν είναι ανοικτό, τότε θα υπάρχει $x \in f^{-1}(\alpha, +\infty) : \nexists n \in \mathbb{N} \quad B(x, \frac{1}{n}) \subseteq f^{-1}(\alpha, +\infty)$
δηλ. $\forall n \exists y_n \in B(x, \frac{1}{n})$ τέτοιο ώστε $y_n \notin f^{-1}(\alpha, +\infty)$
οπότε $|y_n - x| < \frac{1}{n}$ και $f(y_n) \leq \alpha$ (1). Αλλά $x \in f^{-1}(\alpha, +\infty) \Rightarrow f(x) > \alpha$ (2)
Από τη σχέση (1) έχουμε $\lim_n y_n = x$ και $\liminf f(y_n) \leq \alpha$ (3)

$$\boxed{f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in A \Rightarrow \liminf f(x) \leq \liminf g(x) \Rightarrow \limsup f(x) \leq \limsup g(x)}$$

απο (2), (3)

$\liminf_n f(y_n) \leq a < f(x)$ άτοπο (υπόθεση)

αρα $f^{-1}(a, +\infty)$ ανοικτό $\Rightarrow f$ κάτω ημισυνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Προσέγγιση του Baire)

Έστω $f \in F(A, \mathbb{R})$ κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(g_n) \in C(A, \mathbb{R})$ τέτοια $g_n \xrightarrow{c.o} f$ (1)

Απόδειξη

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y \in A$ ορίσουμε $g_n(y) = \inf \{ n \min\{1, |y-x|\} + f(x) : x \in A \}$.

Συνέχεια $g_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $y \in A$ και εσθ με $\varepsilon > 1$

Θέσουμε $\delta := \frac{\varepsilon}{n+1}$. Εφόσον $g_n(y) = \inf \{ \dots \} \exists x_1 \in A$ τέτοιο ώστε $n \cdot \min\{1, |y-x_1|\} + f(x_1) \leq g_n(y) + \delta$ (2). Έστω $\bar{x} \in A$ με $|\bar{x}-y| < \delta$ τότε $|\bar{x}-x_1| \leq |\bar{x}-y| + |y-x_1| \stackrel{(*)}{\uparrow}$ αρα και $\min\{1, |\bar{x}-x_1|\} \leq \min\{1, |\bar{x}-y|\} + \min\{1, |y-x_1|\}$. Διότι έστω $\alpha = |\bar{x}-x_1|$, $\beta = |\bar{x}-y|$, $\gamma = |y-x_1|$ γυρίζουμε: $\alpha \leq \beta + \gamma$ (*)

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 1$ τότε $\min\{1, \alpha\} = \alpha < \beta + \gamma = \min\{1, \beta\} + \min\{1, \gamma\}$

(ii) $0 \leq \alpha, \beta < 1$ και $\gamma > 1$ τότε $\min\{1, \alpha\} = \alpha \leq \beta + \gamma = \min\{1, \beta\} + \gamma$

αρα $\min\{1, \alpha\} - \min\{1, \beta\} \leq \gamma$ αλλά και $\min\{1, \alpha\} - \min\{1, \beta\} \leq 1$
 $\Rightarrow \min\{1, \alpha\} - \min\{1, \beta\} \leq \min\{1, \gamma\}$ (iii) $0 \leq \alpha < 1, \beta, \gamma > 1$, (iv) $\alpha, \beta, \gamma > 1$, (v) $\alpha > 1, \beta, \gamma < 1$

οπότε $\min\{1, |\bar{x}-x_1|\} \leq \delta + \min\{1, |y-x_1|\}$ (*) οπότε

$$g_n(\bar{x}) = \inf \{ n \min\{1, |\bar{x}-x|\} + f(x) : x \in A \} \leq n \min\{1, |\bar{x}-x_1|\} + f(x_1) \stackrel{(*)}{\leq} n(\delta + \min\{1, |y-x_1|\}) + f(x_1) \\ = n\delta + n \min\{1, |y-x_1|\} + f(x_1) \stackrel{(2)}{\leq} n\delta + g_n(y) + \delta = (n+1)\delta + g_n(y)$$

Αρα $g_n(\bar{x}) - g_n(y) < (n+1)\delta = \varepsilon$

Ομοιο

$$g_n(\bar{x}) = \inf \{ n \min \{ 1, |\bar{x} - x| \} + f(x) : x \in A \} \quad \text{οπότε} \quad \exists x_1 \in A \text{ τέτοιο}$$

$$\text{ώστε} \quad n \min \{ 1, |\bar{x} - x_1| \} + f(x_1) \leq g_n(\bar{x}) + \delta \quad \text{αρα} \quad g_n(y) = \dots \leq (n+1)\delta + g_n(\bar{x})$$

$$\text{αρα} \quad g_n(y) - g_n(\bar{x}) \leq (n+1)\delta = \varepsilon \quad \text{αρα} \quad \text{εάν } \bar{x} \in A \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$|\bar{x} - y| < \delta \Rightarrow |g_n(\bar{x}) - g_n(y)| < \varepsilon \quad \text{αρα} \quad g_n \text{ συνεχής στο } \bar{x} \in A$$

και εφόσον τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $x \in A$ έπεται

ότι g_n συνεχής στο A . Αρα (g_n) ακολουθία συνεχών συνα-

ρτήσεων • (g_n) αύξουσα ακολουθία

Για $n \in \mathbb{N}$ και $y \in A$ έχουμε $g_n(y) = \inf \{ n \min \{ 1, |y - x| \} + f(x) : x \in A \}$

$$\leq n \cdot \min \{ 1, |y - x| \} + f(x) \leq (n+1) \min \{ 1, |y - x| \} + f(x) \quad , x \in A \quad \text{οπότε}$$

$$g_n(y) \leq (n+1) \min \{ 1, |y - x| \} + f(x) \quad \forall x \in A \quad \text{αρα} \quad g_n(y) \leq \inf \{ (n+1) \min \{ 1, |y - x| \} + f(x) \} = g_{n+1}(y)$$

Αρα (g_n) αύξουσα

• (g_n) συγκλίνει κατά σημείο στην f

$$\text{Για κάθε } y \in A \text{ και } n \in \mathbb{N} \text{ έχουμε} \quad g_n(y) = \inf \{ n \min \{ 1, |y - x| \} + f(x) : x \in A \}$$

$$\leq n \cdot \min \{ 1, |y - y| \} + f(y) = f(y) \quad (3)$$

Αρα (g_n) είναι κατά σημείο φραγμένη και εφόσον (g_n) είναι και αύξουσα έπεται $\forall x \in A, \lim g_n(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Έστω $\lim g_n(x) = h(x), x \in A$ οπότε $h: A \rightarrow \mathbb{R}$

Θα δείξουμε ότι $h \equiv f$ στο A . Εφόσον η f είναι κατά φραγμένη, $\exists M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $M \leq f(x), \forall x \in A$. Έστω $y \in A$

$$\text{Εφόσον } g_n(y) = \inf \{ \dots : x \in A \} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$n \min \{ 1, |x_n - y| \} + f(x_n) \leq g_n(y) + \frac{1}{n} \quad (4) \quad \text{ή}$$

$$\min \{ 1, |x_n - y| \} \leq \frac{1}{n} (g_n(y) - f(x_n) + \frac{1}{n}) \rightarrow \min \{ 1, |x_n - y| \} \leq \frac{1}{n} (g_n(y) - M + \frac{1}{n})$$

$$\text{Εφόσον } g_n(y) \leq f(y) \quad \text{Επειδή (από (3))} \quad \therefore \lim \frac{1}{n} (g_n(y) - M + \frac{1}{n}) = 0$$

$$\text{αρα και } \lim x_n = y$$

αλλά η f είναι κάτω ημιοσυνεχής

$$f(y) \leq \liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} f(x_n) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (n \min\{1, |y - x_n|\} + f(x_n)) \leq$$

$$\stackrel{(A)}{\leq} \liminf_{x \rightarrow y} \left(g_n(y) + \frac{1}{n} \right) = \liminf_{x \rightarrow y} g_n(y) = h(y)$$

αρα $f(y) \leq h(y)$ ^(A). Αλλά από σχέση (3) $g_n(y) \leq f(y)$

αρα $h(y) = \liminf_{x \rightarrow y} g_n(y) \leq f(y)$ ^(A)

$$\stackrel{(A)}{\Rightarrow} f(y) = h(y)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ημιοσυνεχής (άνω ή κάτω) τότε υπάρχει ακολουθία πολυώνυμικών συναρτήσεων $P_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P_n \xrightarrow{p} f$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων λέμε ότι είναι Baire 1. (συμβ. $B^1(A)$)

Συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι κατά σημείο όριο συναρτήσεων Baire 1 λέγονται Baire 2. (συμβ. $B^2(A)$)

Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Baire 1. Διότι αρκεί να πάρω $f_n = f \ \forall n$ και (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (διότι f συνεχής) και επιπλέον $f_n \xrightarrow{p} f$. Επίσης κάθε συνάρτησης $f \in B^1$ είναι και Baire 2 αρκεί να πάρω $f_n = f \ \forall n \in \mathbb{N}$. Δηλ. $(C(A, \mathbb{R})) \subseteq B^1(A) \subseteq B^2(A)$

• Σύμφωνα με το θεώρημα προσ. και Baire: κάθε κάτω φραγμένη και κάτω ημιοσυνεχής είναι Baire 1 (ομοίως και κάθε άνω φραγμένη και άνω ημιοσυνεχής είναι Baire 1) (24)

MONOTONES ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Η f λέγεται αυξουσα αν
 $\forall x, y \in A$ με $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Η f λέγεται φθίνουσα αν $\forall x, y \in A$ με $x < y \Rightarrow$
 $f(x) \geq f(y)$

ΛΗΜΜΑΤΑ

- Εάν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και f φονόρουν στο $[a, b]$ τότε η f είναι φραγμενη